CONCOURS DE RECRUTEMENT DES ELEVES PILOTES DE LIGNE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 H.00
Coef. : 6
- : -

Ce sujet comporte 5 problèmes indépendants.

Les candidats doivent choisir quatre problèmes, et quatre seulement, parmi les cinq proposés. Ils doivent indiquer leur choix en tête de leur copie. Ne sera corrigée que la rédaction correspondant à ce choix.

1er PROBLEME - Soit la fonction y de la variable réelle x

$$y : x \longmapsto y(x) = \text{Arctg } x$$

1°- Démontrer que la valeur de la dérivée $y^{(n)}$ d'ordre n de y peut se mettre sous la forme :

$$y^{(n)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$$

où P_{n-1} est un polynome dont on précisera le degré, la parité et le coefficient de son terme de degré le plus élevé.

2°- Déterminer les limites de $y^{(n)}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$ En déduire que $P_{n-1}(x)$ a toutes ses racines réelles distinctes et séparées par celles de $P_{n-2}(x)$ (on procèdera par récurrence et on appliquera le théorème de Rolle).

ème PROBLEME - a et b étant des nombres réels, on considère l'ensemble E des matrices carrées de la forme :

$$M(a,b) = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

1°- L'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ étant rapporté à sa base canonique B, on considère les endomorphismes I et J de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices respectives sont M (1,0) et M (0,1) : Déterminer les images par J^2 des éléments de B; Montrer que J^2 est une combinaison linéaire de I et J; Montrer, sans calculer son déterminant, que M (0,1) est inversible et déterminer son inverse; Déterminer l'image par J de la somme des éléments de B.

2°- Montrer que E est une algèbre sur le corps des réels dont on déterminera la dimension, une base et les diviseurs de zéro.

../..

3ème PROBLEME - Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et A le point de coordonnées (a,o). Soit P un point variable sur (C) défini par l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OP}) = t$. La tangente en P à (C) rencontre en Q la tangente en A à (C).

1°- La parallèle à Ox menée par Q coupe OP en I. Déterminer analytiquement et géométriquement la courbe décrite par I quand P parcourt le cercle.

2°- Sur la tangente en P orientée dans le sens trigonométrique on porte à partir de Q une longueur constante $\overline{QM} = b$. Déterminer les coordonnées de M. Vérifier que la tangente en M au lieu de M est perpendiculaire à IM.

3°- Construire la courbe décrite par M lorsque b = a

(on pourra poser utilement $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.)

4ème PROBLEME - Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le point courant M d'une courbe (C) admet x et y pour coordonnées cartésiennes, et, pour coordonnées polaires θ et r.

1°- Exprimer $y' = \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d\theta}{dx}$ en fonction de θ, r et $r' = \frac{dr}{d\theta}$.

N étant l'intersection de la normale en M à (C) avec la droite symétrique de OM par rapport à l'axe des abcisses, exprimer les coordonnées cartésiennes de N en fonction de x, y et y' d'une part, et, d'autre part, en fonction de θ, r et r'.

2°- (C) est telle que le lieu de N lorsque M parcourt (C) est le cercle Γ de centre O et de rayon R, montrer alors que

$$(yy' + x)^2 \ (x^2 + y^2) - R^2 \ (x - yy')^2 = 0$$

Transformer cette expression en coordonnées polaires et déterminer les solutions de l'équation différentielle ainsi obtenue. Construire la courbe (C particulière qui passe par O; Montrer géométriquement que les points de cette courbe particulière, non situés sur les axes, en lesquels la tangente est parallèle à l'un de ceux-ci sont sur Γ .

5ème PROBLEME - Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la courbe (C) d'équations paramétriques

$$x = \frac{t}{1 + t^3} \qquad y = \frac{t^2}{1 + t^3}$$

1°- Que déduit-on du changement de t en $\frac{1}{t}$ dans ces équations ?

Construire (C).

2°- Montrer qu'en général, une droite du plan rencontre (C) en trois points de coordonnées réelles ou complexes. M(t) étant le point de (C) correspondant à la valeur t du paramètre, montrer que la condition nécessaire et suffisante que doivent satisfaire t_1, t_2 et t_3 pour que $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ soient alignés, est : $t_1 \ t_2 \ t_3 = 1$.

Considérant que la tangente en M(t) y coupe (C) en deux points confondus, déterminer en fonction de t la valeur θ du paramètre correspondant au point $N(\theta)$ où cette tangente recoupe (C). En déduire que si $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont alignés, alors $N(\theta_1)$, $N(\theta_2)$ et $N(\theta_3)$ le sont aussi.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail